よく鳴る風鈴の力学的考察

下　村　　裕

1　序　論
2　風鈴のモデル化
2.1　二重振り子
2.2　初期条件
2.3　解とその極大値
3　極大値の最大条件
3.1　一般の場合
3.2　重量比，あるいは長さ比が固定されている場合
4　結　論

1　序　論

夏の風物詩ともなっている風鈴は，風を受けて心地よい音を奏で，涼を呼ぶ。風鈴は，鐘の中に舌と呼ばれる部分が糸などで吊り下げられ，その舌はやはり糸などで下部の短冊につながっている。風を受けて短冊が揺れ，上部につながっている舌が揺れて鐘に当たると音を出す。その揺れ方はさまざまであるが，風が吹いてあまり鳴らない風鈴もある。風鈴の感度は何が決めているのであろうか。

本研究では，風鈴の短冊が瞬間的に風を受けた時，決まった長さの糸で吊り下げられた舌の変位角（鉛直からずれる角度）を力学的に計算し，よく鳴る風鈴の条件を考察する。風鈴を二重振り子でモデル化し，理論的に解析することによって，変位角が最大となる舌と短冊の質量比，及びそれぞれの糸の長さの比を数値的に求める。さらに，質量比と長さ比が固定されている場合の最大条件も調べる。

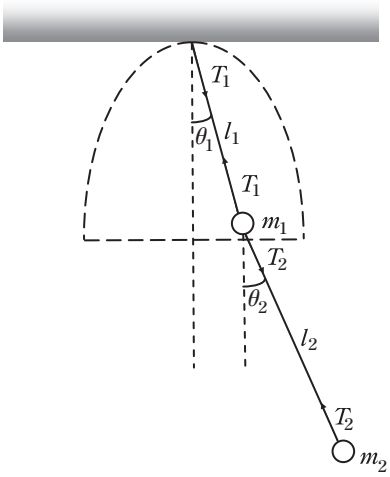

図１　二重振り子としての風鈴

なお，二重振り子の数値シミュレーションによって，よく鳴る風鈴を研究した報告[1)]があり，短冊 / 舌の質量比が大きくなるほど吹く風を有効に捉えることができる，等の結論を導いている。しかし，本研究とは異なる初期条件の結果であり，また変位角を最大とする質量比や長さ比が求められていない。

2　風鈴のモデル化

風鈴は序論で述べたような構造をもっているので，**図１**に示された二重振り子によって風鈴をモデル化する。舌，短冊の重心は，それぞれ質量 m_1, m_2 の質点と見なす。

2.1　二重振り子

図１に示された二重振り子において，質量 m_1 の質点が支点から長さ l_1, 張力 T_1 の糸で結ばれ，それは鉛直軸と θ_1 の角度を成している。また，その質点から長さ l_2, 張力 T_2 の糸によって質量 m_2 の質点が連結され，その糸は

鉛直軸と θ_2 の角度を成している。ここでは微小振動を想定し，

$$\theta_1 \ll 1,\ \theta_2 \ll 1, \tag{1}$$

とする。

以下に二重振り子の一般解を導出する。

まず，二つの質点に対する水平方向と鉛直方向の運動方程式は，重力加速度を g として次のように書ける：

$$m_1 l_1 \ddot{\theta}_1 = -T_1\theta_1 + T_2\theta_2, \tag{2}$$

$$m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 = -T_2\theta_2 - m_2 l_1 \ddot{\theta}_1, \tag{3}$$

$$T_1 = m_1 g + T_2, \tag{4}$$

$$T_2 = m_2 g. \tag{5}$$

これらの式から張力 T_1，T_2 を消去すると

$$m_1 l_1 \ddot{\theta}_1 + (m_1 + m_2) g\theta_1 - m_2 g\theta_2 = 0, \tag{6}$$

$$m_2(l_1\ddot{\theta}_1 + l_2\ddot{\theta}_2) + m_2 g\theta_2 = 0, \tag{7}$$

となるが，解を $\theta_1 = A\exp(i\omega t + \alpha)$，$\theta_2 = B\exp(i\omega t + \beta)$ と置けば，

$$\begin{pmatrix} -m_1 l_1 \omega^2 + (m_1 + m_2)\mathrm{g} & -m_2 g \\ -m_2 l_1 \omega^2 & -m_2 l_2 \omega^2 + m_2 g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

が成立する。$A = B = 0$ は式 (8) の自明な解であるが，それ以外に解が存在する条件は，式 (8) 左辺にある 2 次正方行列の行列式 Δ が 0 となることである。すなわち，

$$\begin{aligned} \Delta &= \{-m_1 l_1 \omega^2 + (m_1 + m_2) g\}\{-m_2 l_2 \omega^2 + m_2 g\} - m_2^2 l_1 g \omega^2 \\ &= m_2\{m_1 l_1 l_2 \omega^4 - (m_1 + m_2)(l_1 + l_2) g\omega^2 + (m_1 + m_2) g^2\} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

この式 (9) を満足する ω は 2 個存在し，それらを $\omega_\pm$ で表すと，

$$L = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \frac{2l_1 l_2}{l_1 + l_2}, \tag{10}$$

$$\varepsilon = 1 - \frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{4l_1l_2}{(l_1+l_2)^2}, \tag{11}$$

として $(0<\varepsilon<1)$,

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{2g}{L}(1 \pm \sqrt{\varepsilon}), \tag{12}$$

で与えられる。そして式 (8) より，それぞれの場合に

$$B = AR_{\pm}, \tag{13}$$

$$R_{\pm} = \frac{m_1+m_2}{m_2}\left\{1 - \frac{l_1+l_2}{2l_2}(1 \pm \sqrt{\varepsilon})\right\}, \tag{14}$$

の関係が成立する。したがって，θ_1 と θ_2 は実数であることに注意して，

$$\theta_1 = \gamma\cos(\omega_+ t+\alpha) + \delta\cos(\omega_- t+\beta), \tag{15}$$

$$\theta_2 = \gamma R_+\cos(\omega_+ t+\alpha) + \delta R_-\cos(\omega_- t+\beta), \tag{16}$$

を得る。ここで，α，β，γ，δ は初期条件で決まる定数である。

2.2 初期条件

本研究では，鉛直方向に静止している風鈴の短冊が，瞬間的に風を受けて一定の速度 v_0 で動き出す場合を想定し，l_1 が一定のとき，その影響で θ_1 が最初に極大となる値を調べ，それが最大となるような質量比 m_2/m_1 と長さ比 l_2/l_1 を求める。

まず，風圧を P，短冊の質量面密度を σ，短冊の断面積を S，風が短冊に当たっている微少時間を Δt とすれば，運動量変化は力積に等しいので，

$$\sigma S v_0 = PS\Delta t, \tag{17}$$

したがって，v_0 は短冊の面積 S に依存せず，

$$v_0 = \frac{P\Delta t}{\sigma}, \tag{18}$$

と表せる。この v_0 を一定と考えて，θ_1 と θ_2 の初期条件は，$t=0$ のとき，

$$\theta_1=\theta_2=\dot{\theta}_1=0,\ \dot{\theta}_2=\frac{v_0}{l_2}, \tag{19}$$

で与えられる。

2.3 解とその極大値

初期条件 (19) を満足する解は，式 (15)，式 (16) より

$$\theta_1=\frac{v_0}{g}\frac{m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}\frac{2l_1l_2}{(l_1+l_2)^2}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)}}\{\omega_+\sin(\omega_-t)-\omega_-\sin(\omega_+t)\}, \tag{20}$$

$$\theta_2=\frac{v_0}{g}\frac{m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}\frac{2l_1l_2}{(l_1+l_2)^2}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)}}\{\omega_+R_-\sin(\omega_-\mathrm{t})-\omega_-R_+\sin(\omega_+t)\}, \tag{21}$$

と求められる。

式 (20) より

$$\frac{d\theta_1}{dt}=2v_0\frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{1}{l_1+l_2}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\sin\left(\frac{\omega_+-\omega_-}{2}\mathrm{t}\right)\sin\left(\frac{\omega_++\omega_-}{2}\mathrm{t}\right), \tag{22}$$

であるので，θ_1 は時点

$$t_0=\frac{2\pi}{\omega_++\omega_-}, \tag{23}$$

で，最初の極大値

$$\theta_1(t_0)=\frac{v_0}{g}\frac{m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}\frac{2l_1l_2}{(l_1+l_2)^2}\times\frac{1}{\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)}}\left(\omega_+\sin\frac{2\pi\omega_-}{\omega_++\omega_-}-\omega_-\sin\frac{2\pi\omega_+}{\omega_++\omega_-}\right), \tag{24}$$

をとる。ここで

$$\frac{\omega_\pm}{\omega_++\omega_-}=\frac{1}{2}\left(1\pm\frac{\sqrt{\varepsilon}}{1+\sqrt{1-\varepsilon}}\right), \tag{25}$$

なので，

$$\theta_1(\mathrm{t}_0)=v_0\sqrt{\frac{1}{2gl_1}}\,\frac{m_2}{m_1+m_2}\sqrt{\frac{l_1}{l_1+l_2}}\times$$
$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left(\sqrt{1+\sqrt{\varepsilon}}+\sqrt{1-\sqrt{\varepsilon}}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{1+\sqrt{1-\varepsilon}}\pi\right), \tag{26}$$

と表せる。もし，変数

$$x=\frac{m_2}{m_1+m_2}, \tag{27}$$

$$y=\frac{l_1}{l_1+l_2}, \tag{28}$$

を導入すれば，式 (11) より

$$\varepsilon=1-4(1-x)\mathrm{y}(1-y), \tag{29}$$

となる ($x\leq\varepsilon\leq1$)。あるいは，

$$x=1-\frac{1-\varepsilon}{4y(1-y)}=\frac{1}{4y(1-y)}\{-4y^2+4y-(1-\varepsilon)\}, \tag{30}$$

と表せるので，式 (26) は次のように書き直せる：

$$\theta_1(t_0)=\frac{v_0}{4}\sqrt{\frac{1}{2gl_1}}\,P(\varepsilon)Q(y,\varepsilon), \tag{31}$$

$$P(\varepsilon)=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left(\sqrt{1+\sqrt{\varepsilon}}+\sqrt{1-\sqrt{\varepsilon}}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{1+\sqrt{1-\varepsilon}}\pi\right), \tag{32}$$

$$Q(y,\varepsilon)=4x\sqrt{y}=\frac{1}{\sqrt{y}(1-y)}\{-4y^2+4y-(1-\varepsilon)\}. \tag{33}$$

3　極大値の最大条件

本章では v_0 と l_1 が一定の条件で，$\theta_1(t_0)$ の最大条件を求める。式 (31) によれば，これは $P(\varepsilon)Q(y,\varepsilon)$ の最大条件である。

3.1　一般の場合

式 (33) より

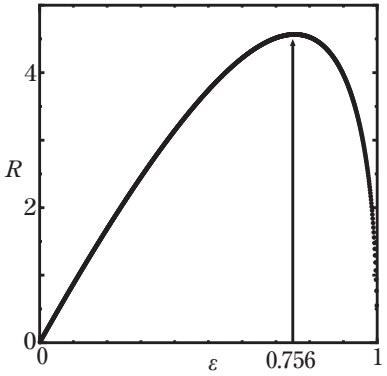

図 2　角変位の極値を決める関数 $R(\varepsilon)$

$$\frac{\partial Q(y,\varepsilon)}{\partial y} = \frac{2}{y^{3/2}(1-y^2)} H(y), \tag{34}$$

$$H(y) = y^3 - 2y^2 + \frac{1+3\varepsilon}{4} y + \frac{1-\varepsilon}{4}, \tag{35}$$

と計算できる。$H(0)=(1-\varepsilon)/4>0$，$H(1)=-(1-\varepsilon)/2<0$ であるので，$H(y)=0$ は 3 実根をもつ。それらを小さい順に y_1，y_2，y_3 と表せば，$y_1<0<y_2<1<y_3$，であることがわかる。したがって，εを固定した場合，Q は $y=y_2$ で最大となる。y_2 は，

$$a = \frac{\sqrt{13-9\varepsilon}}{6}, \qquad b = \frac{19-27\varepsilon}{3(13-9\varepsilon)}, \tag{36}$$

としたとき，ビエタの解[2)]より

$$y_2 = \frac{2}{3} + 2a \cos\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{b}{2a} + \frac{4\pi}{3}\right), \tag{37}$$

と表せる。ただし，ここで arccos の主値は $[0,\ \pi]$ としている。

以上より，$\theta_1(t_0)$ の最大値は，

$$R(\varepsilon) = P(\varepsilon)Q(y_2,\varepsilon), \tag{38}$$

が最大となる値によって決められる。**図 2** は $R(\varepsilon)$ を数値的に求めた結果で

ある。$R(\varepsilon)$ の最大値を与える ε は

$$\varepsilon = 0.756, \tag{39}$$

と見出され，このとき

$$x = 0.714,$$
$$y = y_2 = 0.692, \tag{40}$$

であることがわかる。式 (27)，(28) より，式 (40) の x，y に対応して

$$r = \frac{m_2}{m_1} = 2.50,$$
$$s = \frac{l_2}{l_1} = 0.445, \tag{41}$$

となる。しかし，m_1 が金属やガラス製の舌の質量，m_2 が紙製の短冊の質量である実際の風鈴では $m_1 > m_2$ なので，この条件は現実的でない。そこで，次節では，質量比，あるいは，長さ比が固定されている場合の最大条件を求める。つまり，x あるいは y が一定の場合である。

3.2 質量比，あるいは長さ比が固定されている場合

本節では，x あるいは y が一定値として与えられている場合を考える。

まず計算を簡単にするため，ε に代わる新しい変数として

$$\zeta = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{1+\sqrt{1-\varepsilon}}, \tag{42}$$

を定義する。すると

$$\sqrt{\varepsilon} = \frac{2\zeta}{1+\zeta^2}, \tag{43}$$

なので，

$$P(\varepsilon) = \frac{\sqrt{1+\zeta^2}}{\zeta}\sin(\pi\zeta). \tag{44}$$

x を固定した場合，式 (29) より y は ε の関数となるので，$Q(y,\varepsilon)$ は ε の一変

数関数である。また，y を固定した場合は当然の事実である。よって，いずれの場合も $Q(y,\varepsilon)$ は ζ のみの関数であり，それを $S(\zeta)$ と定義する：

$$S(\zeta)=Q(y,\varepsilon). \tag{45}$$

したがって，式 (31)，(44)，(45) より

$$G(\zeta)=PQ=S(\zeta)\frac{\sqrt{1+\zeta^2}}{\zeta}\sin(\pi\zeta), \tag{46}$$

の最大値が $\theta_1(t_0)$ の最大値に対応する。$G(\zeta)$ が最大となる ζ は，

$$\frac{dG(\zeta)}{d\zeta}=S(\zeta)\left(\frac{\zeta}{S}\frac{dS}{d\zeta}-\frac{1}{1+\zeta^2}+\pi\zeta\cot(\pi\zeta)\right)\frac{\sqrt{1+\zeta^2}}{\zeta^2}\sin(\pi\zeta), \tag{47}$$

を 0 とおいて，

$$\frac{1}{1+\zeta^2}-\pi\zeta\cot(\pi\zeta)=\zeta\frac{d\ln S}{d\zeta}, \tag{48}$$

を満足することがわかる。

3.2.1　質量比固定の場合

x が固定されている場合，x と ε で決まる y は式 (29) より 2 次関数の 2 実根として求められるが，式 (33) で定義される $Q=4x\sqrt{y}$ に対してより大きい値を与える大きい方の根を採用して

$$y=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{\varepsilon-x}{1-x}}\right), \tag{49}$$

とする。式 (33)，(43)，(45)，(49) を用いると $S(\zeta)$ は

$$S(\zeta)=4x\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{4\zeta^2/(1+\zeta)^2-x}{1-x}}\right)}, \tag{50}$$

となる。ここで，$x\le\varepsilon\le1$ より $\sqrt{x}/(1+\sqrt{1-x})\le\zeta\le1$ である。そして，

$$\frac{d\ln S}{d\zeta}=\frac{2\zeta(1-\zeta^2)}{(1+\zeta^2)^3}\left(\sqrt{(1-x)\left\{\frac{4\zeta^2}{(1+\zeta^2)^2}-x\right\}}+\frac{4\zeta^2}{(1+\zeta^2)^2}-x\right)^{-1}, \tag{51}$$

と計算される。

$G(\zeta)$ の最大値を与える $\zeta=u(x)$ は，式 (48)，(51) を用いて数値的に求める

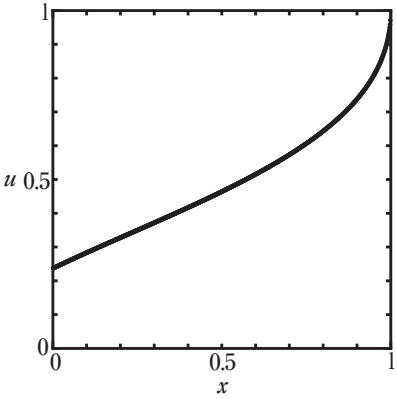

図３　質量比固定の場合，$G(\zeta)$ の最大を与える $\zeta=u(x)$

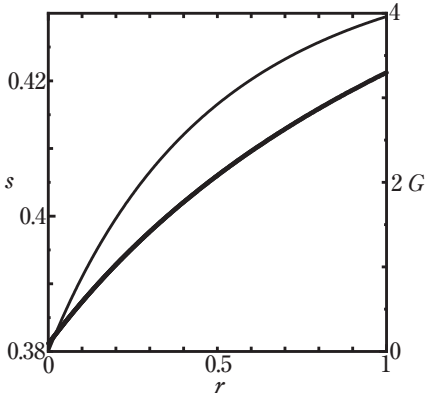

図４　質量比固定の場合，$G(\zeta)$ の最大を与える $s(r)$（太線）と対応する最大値 G（細線）

ことができるが，ここでは各 x に対し $G(\zeta)$ そのものを数値計算することによって求める。**図３**はその結果であり，$u(x)$ を示している。$u(x)$ は x の単調増加関数であることがわかる。なお，$\zeta=u(x)$ は式 (48) を満足することが数値的に確認できる。また，**図４**は，変数を変えて描いたグラフであり，太線は $u(x)$ に対応する $s=l_2/l_1$ を，また細線はその場合の最大値 G を，それぞれ $r=m_2/m_1$ の関数として示している。$0\leqq r\leqq 1$ の領域において，s は r の単

調増加関数であることがわかる。例えば，$r=0.2$ なら $\theta_1(t_0)$ を最大とする s は約 0.39 と読み取れ，このような風鈴は実際に製作可能であろう。図 4 に示されていないが，G の最大値を与える ζ は $r=2.50$，$s=0.445$ に対応し，これは3. 1節の結果と一致する。

3. 2. 2　長さ比固定の場合

y が固定されている場合，前節と同様にして，式 (30)，(33)，(43)，(45) より

$$S(\zeta)=\frac{1}{\sqrt{y}(1-y)}\left\{4y(1-y)-\left(\frac{1-\zeta^2}{1+\zeta^2}\right)^2\right\}, \tag{52}$$

となり，

$$\frac{d\ln S}{d\zeta}=\frac{8\zeta(1-\zeta^2)}{(1+\zeta^2)\{4y(1-y)(1+\zeta^2)^2-(1-\zeta^2)^2\}}, \tag{53}$$

と計算される。ただし，$\sqrt{1-4y(1-y)}/(1+\sqrt{4y(1-y)})\leq\zeta\leq 1$ である。

$G(\zeta)$ の最大値を与える $\zeta=v(y)$ は，式 (48)，(53) を用いて数値的に求めることができるが，ここでは3. 2. 1節同様，各 y に対し $G(\zeta)$ そのものを数値計算することによって求める。**図 5** はその結果であり，$v(y)$ を示している。$v(y)$ は，$y=0.5$ に対称な下に凸の関数である。なお，$\zeta=v(y)$ は式 (48) を満足することが数値的に確認できる。また**図 6** は，変数を変えて描いたグラフであり，太線は $v(y)$ に対応する $r=m_2/m_1$ を，また細線はその場合の最大値 G を，それぞれ $s=l_2/l_1$ の関数として示している。このグラフから，s を与えれば G を最大にする r が得られる。しかし，r が 2 以上となってしまい，前に述べた理由から，長さ比を固定する場合の $\theta_1(t_0)$ を最大とする条件は実現困難である。図 6 が示すように，G の最大値を与える ζ は $r=2.50$，$s=0.445$ に対応し，これは3. 1節の結果と一致する。

4　結　論

短冊が瞬間的に風を受けた場合に舌の変位角が最初に極大となる状況を，

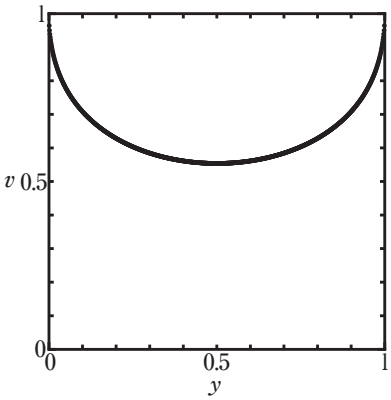

図５　長さ比固定の場合，$G(\zeta)$ の最大を与える $\zeta=v(y)$

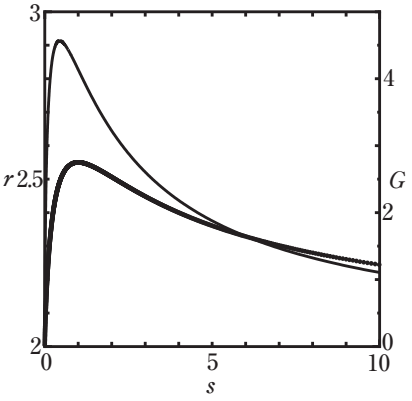

図６　長さ比固定の場合，$G(\zeta)$ の最大を与える $r(s)$（太線）と対応する最大値 G（細線）

二重振り子をモデルとして力学的に考察した。短冊の初期速度と舌までの糸の長さが一定の場合，質量比が 2.50，長さ比が 0.445 の時に極大変位角が最大となることがわかった。しかしながら，実際の風鈴では $m_1>m_2$ なので，この値は現実的でない。そこで，質量比，あるいは長さ比が固定された場合の最大条件と最大値を求めた。長さ比固定の場合は，最大条件となる質量比

が 2 以上となるため，これも実現が難しい。一方，質量比固定の場合は，0.4 程度の長さ比が最大条件となる。したがって，舌のすぐ下に短冊をつなげることによって，よく鳴る風鈴を作ることができるはずである。

本研究では風鈴の短冊部分をその重心で代表させたが，実際は面積が大きいので空気抵抗の影響を受けるであろう。その影響を考慮した解析は，今後の研究として残されている。

※著者は，慶應義塾大学法学部を2009年 3 月に定年退職される森征一教授へ，本論文を献上する。

1） http://puh.web.infoseek.co.jp/furinsimyu.htm，(2008).
2） http://ja.wikipedia.org/wiki/
%E4%B8%89%E6%AC%A1%E6%96%B9%E7%A8%8B%E5%BC%8F，(2008).